

УДК 622.24.05–004.4

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОШИРЕННЯ СПРЯМОВАНИХ УЛЬТРАЗВУКОВИХ ХВИЛЬ В ТРУБОПРОВОДІ ІЗ ЗВАРНИМ З'ЄДНАННЯМ**І. З. Лютак, А. О. Бедзір, З. П. Лютак, А. А. Мандра**

Івано–Франківський національний технічний університет нафти і газу,
вул. Карпатська, 15, м. Івано–Франківськ, 76019, тел.(03422)421–27,
email: acoustic.field@gmail.com

Запропоновано математичну модель, що описує поширення ультразвукових спрямованих хвиль типу Лемба в багатошаровому середовищі. Зварне з'єднання трубопроводу запропоновано розглядати як багатошарове пружне середовище. Представлено рівняння, що описують поле зміщення та напруження, створене об'ємними ультразвуковими хвилями. Представлено математичний опис утворення спрямованої хвилі в пластині як систему рівнянь, кожне з яких описує об'ємну хвилю. Для розв'язку цієї системи рівнянь побудовано визначник і наведено рівняння кожного його елементу. Для математичного опису поширення спрямованої ультразвукової хвилі в багатошаровому середовищі запропоновано два підходи: матриці передавальних коефіцієнтів та загальної матриці. В методі матриці передавальних коефіцієнтів внутрішні шари будуть складати частину рівнянь, що описують спрямовані хвилі через розподіл хвильового поля (зміщень елементарного об'єму та напружень) на верхній та нижній границях розділу середовищ зовнішніх шарів. Підхід загальної матриці полягає у зборі всіх шарів середовища в одну матрицю.

Ключові слова: математична модель, зварне з'єднання, трубопровід, багатошарове середовище, спрямована хвиля, метод матриці передавальних коефіцієнтів, метод загальної матриці.

Предложена математическая модель, описывающая распространение ультразвуковых направленных волн типа Лэмба в многослойной среде. Сварное соединение трубопровода предложено рассматривать как многослойную упругую среду. Представлены уравнения, описывающие поле смещения и напряжения, созданное объемными ультразвуковыми волнами. Представлено математическое описание образования направленной волны в пластине как систему уравнений, каждое из которых описывает объемную волну. Для решения этой системы уравнений построены определитель и приведены уравнения каждого его элемента. Для математического описания распространения направленной ультразвуковой волны в многослойной среде предложено два подхода: матрицы передаточных функций и общей матрицы. В методе матрицы передаточных коэффициентов внутренние слои будут составлять часть уравнений, описывающих направленные волны через распределение волнового поля (смещений элементарного объема и напряжений) на верхней и нижней границах раздела сред внешних слоев. Подход общей матрицы заключается в сборе всех слоев среды в одну матрицу.

Ключевые слова: математическая модель, сварное соединение, трубопровод, многослойная среда, направленная волна, метод матрицы передаточных функций, метод общей матрицы.

A mathematical model describing the propagation of ultrasonic guided waves in a multi-layered medium is proposed. Weld of the pipeline is proposed to consider as multi-layered elastic medium. Presented equations that describe the displacement field and stress created by bulk ultrasonic waves. The mathematical description of the formation of guided waves in the plate is presented. The formation is described by a system of equations each describes a bulk wave. For solving this system of equations is constructed a determinant and are shown equations for each element. For the mathematical description of the propagation of ultrasonic guided waves in a multi-layered media offers two approaches transfer matrix coefficients and a general matrix. In the method of transfer matrix coefficients the inner layers will be part of the equations that describe guided waves through the distribution of wave field (elementary volume displacement and stress) at the top and bottom interfaces of external layers. General matrix approach consists in collecting all the layers of media in a matrix.

Key words: mathematical model, Weld, pipeline, multi-layered medium, guided wave, transfer matrix coefficients, general matrix.

Трубопровідний транспорт є однією із основних складових енергетичної галузі України. Поряд із магістральними нафтогазопроводами, що переносять основну масу пального, в галузі експлуатуються трубопроводи різних діаметрів, які відіграють не менш важливу роль. Це технологічні трубопроводи перекачувальних станцій, газосховищ тощо. Зважаючи на велику різноманітність та область застосування нафтогазопроводів, вони піддаються внутрішнім і зовнішнім деструктивним чинникам впливу різного характеру та інтенсивності. Одним із перспективних напрямків досліджень є застосування ультразвукових спрямованих хвиль типу Лемба для контролю технічного стану зварного з'єднання.

Принцип формування спрямованих хвиль було запропоновано науковцями Л. Солі та Б. Аулдом ще у 1972 році, кінцеве формування теорії було представлено Б. Аулдом в 1990 р. [1, 2]. Згідно цього принципу чотири об'ємні хвилі на верхній та чотири хвилі на нижній границі розділу формують спрямовану хвилю. Тому для визначення параметрів спрямованої хвилі необхідно отримати рівняння, що описують поширення кожної об'ємної хвилі в пластині [4, 5]. Математичний опис поширення спрямованих ультразвукових хвиль, що базується на підході матриці коефіцієнтів передачі, вперше було сформульовано вченими Н. Хаскелом та В. Томпсоном [8, 9]. Цей метод узагальнений вченим М. Дж. Лоуе [5]. Практичне застосування методу для опису поширення спрямованих ультразвукових хвиль в стінці трубопроводу було представлено вченим А. Мандрою [4]. Підхід загальної матриці для опису поширення спрямованих хвиль вперше було запропоновано науковцем Кнопофом [11] з метою зменшення числової нестабільності існуючих алгоритмів розв'язку хвильових рівнянь. В подальшому цей підхід було доопрацьовано науковцями Шмітом, Дженсеном та Піалучою [12, 13]. Їх вкладом було розроблення алгоритму, що обчислює швидкий відклик середовища поширення хвилі на зовнішнє збурення. Загальне формулювання матриці було здійснено науковцем Лоуе [5].

Приведені дослідження сформували основу для опису поширення ультразвукової спрямованої хвилі в пружному середовищі. Проте ці дослідження не дозволяють проводити обчислення поширення ультразвукової спрямованої хвилі у зварному з'єднанні. Метою даної роботи є виведення кінцевих рівнянь, які дозволятимуть проводити обчислення поширення ультразвукової спрямованої хвилі у

зварному з'єднанні трубопроводу.

Поширення спрямованої хвилі типу Лемба в однорідному середовищі. Опис об'ємних ультразвукових хвиль в пружному однорідному середовищі

Розглянемо принцип утворення спрямованої хвилі в однорідному середовищі. Загальноприйняте положення утворення спрямованих ультразвукових хвиль визначає результуючу хвилю як суперпозицію двох поздовжніх хвиль та поперечних (падаючих та заломлених) на верхній та нижній границях розділу середовища поширення (рис. 1).

В результаті суперпозиції по всій товщині середовища пластини формується ультразвукове поле, що описується хвильовим числом k_1 . Можна стверджувати, що умова утворення спрямованої хвилі визначається наявністю однакового компонента хвильового числа у напрямку осі x_1 у всіх об'ємних хвиль. У іншому випадку, коли всі об'ємні хвилі мають різне хвильове число k_1 , буде утворений інший тип хвилі, або псевдохвиля, що не буде поширюватись вздовж границь розділу.

Очевидно, що при гармонійному законі коливань елементарного об'єму пружного середовища, створеного об'ємними ультразвуковими хвилями, результуюче поле спрямованої хвилі також описуватиметься гармонійним законом коливань в часі. Проте при описі розподілу хвильового поля по товщині пластини гармонійний закон зберігатись не буде. Визначення розподілу коливань по товщині пластини є задачею опису параметрів спрямованої хвилі.

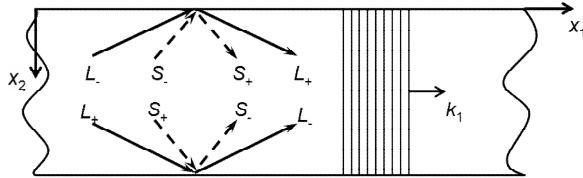
З аналізу форми утворення спрямованої хвилі (рис. 1) можна визначити набір фізичних величин, що формуватимуть розподіл поля зміщення елементарного об'єму пружного середовища:

$$u = f(k_1, \omega, h, c_l, c_t, \rho, \Omega), \quad (1)$$

де u – вектор зміщення елементарного об'єму пружного середовища $\{u_1, u_2\}$; k_1 – хвильове число; ω – кутова частота ультразвукових коливань; h – товщина пластини; c_l, c_t – відповідно швидкості поширення поздовжньої та поперечної хвиль; ρ – густина; Ω – інші параметри.

Для побудови рівнянь, що описують поширення об'ємних ультразвукових хвиль в пластині визначимо невідомі величини, якими будуть: хвильове число в напрямку поширення спрямованої хвилі, частота коливань та амплітуда кожної хвилі. При поширенні ультразвукової хвилі збурюється середовище,

що описується зміщенням елементарного об'єму u та відповідно напруженнями, створеними цими зміщеннями. Тому для повного опису хвильового поля створеного ультразвуковою хвилею, побудуємо рівняння для окремих компонент тензору напружень σ .



L, S – відповідно поздовжня та поперечна об'ємні хвилі; знаки "–" та "+" відповідають напрямку поширення хвилі, де "+" позначає хвилю, що поширюється у додатному напрямку по осі x_2 ; x_1, x_2 – осі Декартової системи координат; k_1 – компонент хвильового вектору у напрямку осі x_1

Рисунок 1 – Утворення спрямованої хвилі

Для поздовжніх хвиль, які поширюються в додатному напрямку x_2 , рівняння матимуть такий вигляд [4, 5]:

$$u_1 = c_l C_H \cdot g_\alpha e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(L+)} , \quad (2)$$

$$u_2 = C_\alpha g_\alpha e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(L+)} ,$$

$$\sigma_{22} = c_l C_i C_{2\beta} g_\alpha e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(L+)} , \quad (3)$$

$$\sigma_{12} = 2C_H c_t^2 C_i C_\alpha g_\alpha e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(L+)} ,$$

де A – амплітуда об'ємних ультразвукових хвиль; L, S – відповідно поздовжня та поперечна об'ємні хвилі; знаки "–" та "+" відповідають напрямку поширення хвилі, де "+" позначає хвилю, що поширюється у додатному напрямку по осі x_2 ; C_H – число Снелліуса.

Інші складові є такими:

$$C_\alpha = \sqrt{1 - c_t^2 C_H^2} , \quad C_\beta = \sqrt{1 - c_t^2 C_H^2} ,$$

$$C_{2\beta} = 1 - 2c_t^2 C_H^2 , \quad g_\alpha = e^{i\omega\sqrt{1 - c_t^2 C_H^2} \cdot x_2 / c_l} , \quad (4)$$

$$g_\beta = e^{i\omega\sqrt{1 - c_t^2 C_H^2} \cdot x_2 / c_l} , \quad C_i = i\omega\rho ,$$

де x_2 – товщина шару поширення ультразвукової спрямованої хвилі.

Для поздовжніх хвиль, які поширюються у від'ємному напрямку:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{c_l C_H}{g_\alpha} e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(L-)} , \\ u_2 &= \frac{-C_\alpha}{g_\alpha} e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(L-)} , \\ \sigma_{22} &= \frac{c_l C_i C_{2\beta}}{g_\alpha} e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(L-)} , \\ \sigma_{12} &= \frac{-2C_H \cdot c_t^2 C_i C_\alpha}{g_\alpha} e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(L-)} . \end{aligned} \quad (5)$$

Для поперечних хвиль, які поширюються в додатному напрямку x_2 :

$$\begin{aligned} u_1 &= C_\beta g_\beta e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(S+)} , \\ u_2 &= -c_t C_H \cdot g_\beta e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(S+)} , \\ \sigma_{22} &= -2C_H \cdot c_t^2 C_i C_\beta g_\beta e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(S+)} , \\ \sigma_{12} &= c_l C_i C_{2\beta} g_\beta e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(S+)} . \end{aligned} \quad (6)$$

Для поперечних хвиль, які поширюються у від'ємному напрямку:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-C_\beta}{g_\beta} e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(S-)} , \\ u_2 &= \frac{-c_t C_H}{g_\beta} e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(S-)} , \\ \sigma_{22} &= \frac{2C_H \cdot c_t^2 C_i C_\beta}{g_\beta} e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(S-)} , \\ \sigma_{12} &= \frac{c_l C_i C_{2\beta}}{g_\beta} e^{i\omega(C_H x_1 - t)} A_{(S-)} . \end{aligned} \quad (7)$$

Константу Снелліуса можна визначити за такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} C_H &= \frac{N_{1(L)}}{c_l} = \frac{N_{1(S)}}{c_t} = \frac{k_1}{\omega} = \\ &= \frac{1}{c_\phi} = \frac{\sin(\theta_L)}{c_l} = \frac{\sin(\theta_S)}{c_t} , \end{aligned} \quad (8)$$

де θ_L – кут нахилу падаючої та відбитої поздовжніх хвиль; θ_S – кут нахилу падаючої та відбитої поперечних хвиль, c_ϕ – фазова швидкість моди спрямованої ультразвукової хвилі; N – вектор проекції напрямку поширення об'ємної хвилі на осі координат.

Можна помітити, що у всіх рівняннях (2)÷(7) є однаковий множник $e^{i\omega(Cn \cdot x_1 - t)}$, який вказує на гармонійне поширення в напрямку x_1 . Цей множник не вносить ніяких змін у загальний вигляд кожної хвилі зокрема оскільки він є однаковим для всіх хвиль. Тому даним множителем при пошуку значення амплітуд можна знехтувати, проте потрібно враховувати його при описі поширення хвилі.

Ультразвукові спрямовані хвилі типу Лемба на границі розділу середовищ

Визначення параметрів спрямованої хвилі залежить від зміни хвильових компонентів в напрямку осі x_2 . Додатково утворення спрямованої хвилі, згідно із визначенням цієї хвилі, залежатиме від фазової різниці хвильових компонентів у часовому просторі.

Щоб показати зв'язок складових коливного процесу запишемо рівняння (2)÷(7) в матричній формі:

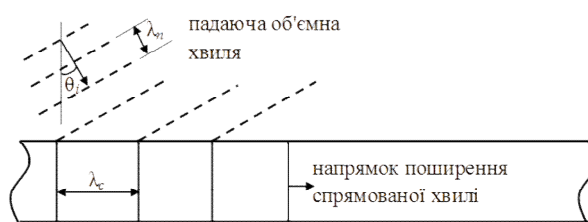
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \times \begin{bmatrix} A_{(L+)} \\ A_{(L-)} \\ A_{(S+)} \\ A_{(S-)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= c_l Cn \cdot g_\beta, D_{12} = c_l Cn / g_\alpha, \\ D_{13} &= C_\beta g_\beta, D_{14} = -C_\beta / g_\beta, D_{21} = C_\alpha g_\alpha, \\ D_{22} &= -C_\alpha / g_\alpha, D_{23} = -c_l Cn \cdot g_\beta, \\ D_{24} &= -c_l Cn / g_\beta, D_{31} = c_l C_i C_{2\beta} g_\alpha, \\ D_{32} &= c_l C_i C_{2\beta} / g_\alpha, D_{33} = -2Cn \cdot c_l C_i C_\beta g_\beta, \\ D_{34} &= 2Cn \cdot c_l^2 C_i C_\beta / g_\beta, D_{41} = 2Cn \cdot c_l^2 C_i C_\alpha g_\alpha, \\ D_{42} &= -2Cn \cdot c_l^2 C_i C_\alpha / g_\alpha, D_{43} = c_l C_i C_{2\beta} g_\beta, \\ D_{44} &= c_l C_i C_{2\beta} / g_\beta. \end{aligned}$$

Матриця (9) є матрицею поля поширення хвилі, яка описує взаємозв'язки між амплітудами хвиль, зміщеннями та напруженнями в будь-якому шарі. Її коефіцієнти залежать від значення точки спостереження відносно координати x_2 , акустичного імпедансу матеріалу шару (ρ , c_l , c_t), частоти коливаний ω та константи Снеліуса Cn . Константа Снеліуса визначається за допомогою хвильового числа k_1 вздовж осі x_1 та частоти.

Хвильове число та відповідно фазову швидкість спрямованої ультразвукової хвилі можна визначити із кута нахилу первинного

перетворювача та параметрів падаючої об'ємної хвилі (рис. 2).



θ_i – кут падіння об'ємної хвилі; λ_n – довжина падаючої хвилі; λ_c – довжина спрямованої хвилі

Рисунок 2 – Збудження спрямованої ультразвукової хвилі

Довжина спрямованої ультразвукової хвилі обчислюється через довжину падаючої об'ємної хвилі так [7]:

$$\lambda_c = \frac{\lambda_n}{\sin \theta_i}, \quad (10)$$

де θ_i – кут падіння об'ємної хвилі; λ_n – довжина падаючої хвилі; λ_c – довжина спрямованої хвилі.

Фазова швидкість c_ϕ обчислюється так [7]:

$$c_\phi = \frac{c_n}{\sin \theta_i}. \quad (11)$$

де c_n – швидкість поширення падаючої об'ємної хвилі.

Як можна побачити із рис. 1 спрямована ультразвукова хвиля після формування від падаючої поздовжньої хвилі, що згенерована первинним перетворювачем, поширюється в шарі границями розділу якого є напівнескінченні простори (наприклад, повітря і газ).

Метод матриці передавальних коефіцієнтів

Суть методу матриці передаточних коефіцієнтів полягає в тому, що кожну об'ємну хвилю описують рівнянням її стану на верхній границі розділу середовищ (стінка труби – напівнескінченний простір) по відношенню до останньої границі розділу. В цьому методі можна розглядати також і багат шарову систему, проте внутрішні шари будуть складати частину рівнянь опису спрямованої хвилі на верхній та нижній границях розділу середовищ.

Поширення спрямованої ультразвукової хвилі в довільному шарі може бути описане таким чином:

$$[\mathbf{A}]_{\text{Шар}_i} = [\mathbf{D}]_{\text{Шар}_i, \text{низ}} \times [\mathbf{D}]_{\text{Шар}_i, \text{верх}}^{-1}, \quad (12)$$

де Λ – матриця, що описує хвильові властивості спрямованої хвилі в i -му шарі.

Обернена матриця D^{-1} є такою [5]:

$$\begin{aligned} D_{11}^{-1} &= \frac{c_i^2 \cdot C_H}{c_l}, D_{12}^{-1} = \frac{C_{2\beta}}{2C_\alpha}, D_{13}^{-1} = \frac{1}{2c_l \cdot C_i}, \\ D_{14}^{-1} &= \frac{C_H}{2C_\alpha C_i}, D_{21}^{-1} = \frac{c_i^2 \cdot C_H}{c_l}, D_{22}^{-1} = \frac{-C_{2\beta}}{2C_\alpha}, \\ D_{23}^{-1} &= \frac{1}{2c_l \cdot C_i}, D_{24}^{-1} = \frac{-C_H}{2C_\alpha C_i}, D_{31}^{-1} = \frac{C_{2\beta}}{2C_\beta}, \\ D_{32}^{-1} &= -c_l \cdot C_H, D_{33}^{-1} = \frac{-C_H}{2C_\beta C_i}, \\ D_{34}^{-1} &= \frac{1}{2c_l \cdot C_i}, D_{41}^{-1} = \frac{-C_{2\beta}}{2C_\beta}, D_{42}^{-1} = -c_l \cdot C_H, \\ D_{43}^{-1} &= \frac{-C_H}{2C_\beta C_i}, D_{44}^{-1} = \frac{1}{2c_l \cdot C_i}. \end{aligned} \quad (13)$$

Матриця шару Λ в результаті множення матриць матиме вигляд [5]:

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= c_i^2 C_H^2 \left(g_\alpha + \frac{1}{g_\alpha} \right) + \frac{C_{2\beta}}{2} \left(g_\beta + \frac{1}{g_\beta} \right), \\ \Lambda_{12} &= \frac{c_l C_H C_{2\beta}}{2C_\alpha} \left(g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \\ &\quad + C_\beta c_l C_H \left(-g_\beta + \frac{1}{g_\beta} \right), \\ \Lambda_{13} &= \frac{C_H}{2C_i} \left(g_\alpha + \frac{1}{g_\alpha} - g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right), \\ \Lambda_{14} &= \frac{c_l C_H^2}{2C_\alpha C_i} \left(g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \\ &\quad + \frac{C_\beta}{2c_l C_i} \left(g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right), \\ \Lambda_{21} &= \frac{C_\alpha b^2 C_H}{c_l} \left(g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \\ &\quad + \frac{C_{2\beta} c_l C_H}{2C_\beta} \left(-g_\beta + \frac{1}{g_\beta} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Lambda_{22} = \frac{C_{2\beta}}{2} \left(g_\alpha + \frac{1}{g_\alpha} \right) + c_l^2 C_H^2 \left(g_\beta + \frac{1}{g_\beta} \right),$$

$$\Lambda_{23} = \frac{C_\alpha}{2c_l C_i} \left(g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \\ + \frac{c_l C_H^2}{2C_\beta C_i} \left(g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right),$$

$$\Lambda_{24} = \Lambda_{13},$$

$$\Lambda_{31} = C_i C_{2\beta} c_l^2 C_H \left(g_\alpha + \frac{1}{g_\alpha} - g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right),$$

$$\Lambda_{32} = \frac{C_i C_{2\beta}^2 c_l}{2C_\alpha} \left(g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \\ + 2C_i C_\beta c_l^3 C_H^2 \left(g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right),$$

$$\Lambda_{33} = \Lambda_{22},$$

$$\Lambda_{34} = \Lambda_{12},$$

$$\Lambda_{41} = \frac{2C_\alpha C_i C_H^2 c_l^4}{c_l} \left(g_\alpha - \frac{1}{g_\alpha} \right) + \\ + \frac{C_i C_{2\beta}^2 c_l}{2C_\beta} \left(g_\beta - \frac{1}{g_\beta} \right),$$

$$\Lambda_{42} = \Lambda_{31},$$

$$\Lambda_{43} = \Lambda_{21},$$

$$\Lambda_{44} = \Lambda_{11}.$$

Матриця шару Λ описує поширення нормальних хвиль, що описуються другим та третім законами Ньютона. Матриця Λ містить компоненти зміщення та напружень і є незалежною від значень амплітуд хвиль. Напруження на нижній границі розділу середовищ можна виразити через напруження на верхній границі розділу так [5]:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}_{н.г.р.} = [\Lambda] \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}_{в.г.р.}, \quad (15)$$

де *н.г.р.*, *в.г.р.* – відповідно, нижня та верхня границі розділу стінки труби – зовнішнє середовище.

Часткові випадки поширення ультразвукової хвилі типу Лемба

Рівняння (15) може бути застосоване у випадку, коли хвильова енергія не виходить і не проходить через границі розділу середовища поширення. Найбільш відповідний випадок до цієї умови є розміщення середовища поширення у повітрі, при цьому виходом хвильової енергії в повітря можна знехтувати.

Очевидно, що напруження на границі розділу середовищ стінка труби – повітря будуть дорівнювати нулю. Це дозволяє спростити запис рівняння (15) для нульових компонентів [5]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{31} & \Lambda_{32} \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{с.зр.р.} \quad (16)$$

Частина матриці, що представлена в системі рівнянь (16), є нижньою лівою підматрицею Λ (рядки 3-ій та 4-ий, стовпці 1-ий та 2-ий). Для знаходження розв'язку системи необхідно прирівняти до нуля визначник f (16):

$$f = \Lambda_{31} \cdot \Lambda_{42} - \Lambda_{41} \cdot \Lambda_{32} \quad (17)$$

Для спрощення обчислення проаналізуємо структуру матриці Λ . М. Дж. Лоуве визначено, що для всіх типів вхідних форм хвилі, навіть при неоднорідних значеннях (константи g_a та g_b є повністю уявними) елементи матриці Λ матимуть постійну форму дійсного або уявного значень [5]:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} R & I & I & R \\ I & R & R & I \\ I & R & R & I \\ R & I & I & R \end{bmatrix} \quad (18)$$

де R, I – відповідно дійсні і уявні значення.

Враховуючи (18), рівняння (17) буде мати завжди дійсне значення.

Представимо визначник $\Lambda_{\text{вк}}$ рівняння (17) у явній формі для можливості проведення аналізу та числових обчислень:

де $C_{\alpha 1} = \sqrt{1 - \frac{c_l^2 k_1^2}{\omega^2}}$, $C_{\beta 1} = \sqrt{1 - \frac{c_l^2 k_1^2}{\omega^2}}$, $C_{2\beta 1} = \frac{2c_l^2 k_1^2}{\omega^2} - 1$ – константи поширення ультразвукової спрямованої хвилі.

$$\Lambda_{\text{вк}} = \left(\frac{\omega \rho c_l \sin\left(\frac{\omega x_2 C_{\beta 1}}{c_l}\right) C_{2\beta 1}^2}{C_{\beta 1}} + \frac{4\rho c_l^4 k_1^2 \sin\left(\frac{\omega x_2 C_{\alpha 1}}{c_l}\right) C_{\alpha 1}}{\omega c_l} \right) \times \left(\frac{\omega \rho c_l c_l^2 \sin\left(\frac{\omega x_2 C_{\alpha 1}}{c_l}\right) C_{2\beta 1}}{C_{\alpha 1}} + \frac{2\rho c_l^3 k_1^2 C_{\beta 1} i}{\omega} \right) - \left(2 \cos\left(\frac{\omega x_2 C_{\alpha 1}}{c_l}\right) - 2 \cos\left(\frac{\omega x_2 C_{\beta 1}}{c_l}\right) \right)^2 C_{2\beta 1}^2 \quad (19)$$

При виведенні (19) було поставлено такі обмежувачі умови:

$$\omega > 0, c_l > 0, c_t > 0 \quad (20)$$

Умови (20) дозволяють значно спростити загальне рівняння (17) при тому, що не порушуються умови пошуку розв'язку.

Спрямовані хвилі можуть також поширюватись в середовищі, де верхній та нижній напівпростори не є повітрям, наприклад, в стінці трубопроводу. У цьому випадку поширення спрямованої хвилі можливе лише тоді, коли пружні хвилі у напівпросторах будуть негармонійними, тобто будуть поширюватись вздовж границі розділу шарів і не виносити хвильову енергію від шару. Оскільки напівпростори є пружним середовищем, то напруження на границі розділу шарів не обов'язково будуть нульовими, тому рівняння на основі напружень не буде мати розв'язку. Тому рівняння поширення спрямованої хвилі побудуємо на основі того, що у шарі немає вхідної хвильової енергії [5]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{22} & \Lambda_{24} \\ \Lambda_{42} & \Lambda_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{с.зр.р.} \quad (21)$$

У (21) врахуємо два пружні напівпростори, що оточують шар, в якому поширюється спрямована ультразвукова хвиля [5]:

$$0 = D^{-1} \times \Lambda \times D|_{x_2=0} \times U_{в.зр.р.} \quad (22)$$

Після проведення обчислень та деяких спрощень отримаємо таке характеристичне рівняння (22):

$$0 = \frac{e^{-2\varphi_2} \cdot e^{-2\varphi_1} (e^{2\varphi_2} + 1)(e^{2\varphi_1} + 1)}{16} + \frac{k^2 c_l^2 \cdot e^{3\varphi_2} \cdot e^{3\varphi_1} \xi_1}{8\omega^2} - \frac{k^4 c_l^4 \cdot e^{3\varphi_2} \cdot e^{3\varphi_1} \xi_1}{4\omega^4} - \frac{k^3 c_l c_t^2 \cdot e^{3\varphi_2} \cdot e^{3\varphi_1} \xi_1}{8\omega^3} + \frac{k^5 c_l c_t^4 \cdot e^{3\varphi_2} \cdot e^{3\varphi_1} \xi_1}{4\omega^5}, \quad (23)$$

$$\xi_1 = (e^{\varphi_2} - e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2} \cdot e^{2\varphi_1} - e^{2\varphi_2} \cdot e^{\varphi_1})^2,$$

$$\varphi_1 = \frac{\omega x_2 \xi_2 i}{c_l}, \quad \varphi_2 = \frac{\omega x_2 \xi_3 i}{c_l},$$

$$\xi_2 = \sqrt{-\frac{k^2 c_l^2 - \omega^2}{\omega^2}}, \quad \xi_3 = \sqrt{-\frac{k^2 c_l^2 - \omega^2}{\omega^2}}.$$

Для проведення обчислень очевидно, що частота та швидкості поширення об'ємних ультразвукових хвиль не можуть дорівнювати нулю. Спосіб, у який можуть бути знайдені корені рівняння, може бути реалізованим за допомогою числових методів, де результат обчислення шукатиметься у вигляді пар значень частота – хвильове число k_1 . Процес проведення обчислень зводиться до визначення значень рівняння (19) при послідовному інкременті хвильового числа та частоти. У цьому випадку комп'ютером буде здійснюватись значна кількість однакових операцій, що пов'язана із множенням констант, що відповідають товщині середовища поширення, швидкостей об'ємних ультразвукових хвиль, густини тощо. Тривалість обчислення на сучасний персональних комп'ютерах може досягати до декількох годин для обмеженої ділянки площини значень $\omega - k_1$. Такі обчислення ставитимуть великі вимоги як до розміру оперативної пам'яті комп'ютера, так і для швидкодії обчислювального пристрою (центрального процесора чи графічної карти). Для зменшення ресурсів, які необхідно виділяти для проведення обчислень та часу, рівняння (19) для труби із однаковими значеннями товщини стінки, густини, швидкостей поширення об'ємних ультразвукових хвиль можна спростити. Одним із шляхів спрощення

рівняння (19) є розклад його в степенний ряд, наприклад, Тейлора. Побудуємо ряд Тейлора при таких значеннях змінних рівняння (19) $c_l = 3300$ м/с, $c_t = 6000$ м/с, $\rho = 7850$ кг/м³, $x_2 = 0.01$ м при двох невідомих змінних частоти та хвильового числа із центральними значеннями $k_1 = 100$ м⁻¹, $\omega = 10^5$ с⁻¹:

$$\begin{aligned} \Lambda_{вк} = & 1.2746 \cdot 10^{28} \omega - 3.2489 \cdot 10^{32} k_1 - \\ & - 6.9713 \cdot 10^{30} (k_1 - 100)^2 - \\ & - 8.6255 \cdot 10^{28} (k_1 - 100)^3 + \\ & + 4.1846 \cdot 10^{26} (\omega - 1E5)(k_1 - 100) + \\ & + 5.5588 \cdot 10^{22} (\omega - 1E5)^2 - \\ & - 7.9452 \cdot 10^{16} (\omega - 1E5)^3 + \\ & + 5.9299 \cdot 10^{24} (\omega - 1E5)(k_1 - 100)^2 + \\ & + 1.9416 \cdot 10^{21} (\omega - 1E5)^2 (k_1 - 100) + \\ & + 2.4779 \cdot 10^{34}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рівняння (24) є більш зручним для проведення обчислення. Додатково (24) вказує значення степенів при членах ряду, які показують обмеженість при проведенні обчислень при великих значеннях частоти і відповідно хвильового числа. Ці обмеження необхідно вирішувати пошуком нових математичних форм рівнянь, що будуть описувати хвильовий процес поширення ультразвуку. Фізично збільшення степенів ряду (24) із збільшенням частоти вказує на зростання складності форми хвилі по товщині стінки труби. В неруйнівному контролі верхнє значення частоти ультразвукових хвиль в більшості випадків обмежені частотою 10 МГц, що є прийнятним для застосування рівняння (24). Для більш складних випадків аналізу поширення ультразвукової спрямованої хвилі необхідно розробляти інші алгоритми.

Метод загальної матриці для опису поширення ультразвукової спрямованої хвилі типу Лемба в багатошаровому середовищі

Підхід загальної матриці для опису поширення ультразвукової хвилі типу Лемба полягає у зборі всіх шарів середовища поширення в одну матрицю [5]. Загальна матриця має квадратну форму і складається з $4(n-1)$ рядків, кожен з яких описує поширення об'ємної хвилі у шарі.

Розглянемо один шар, в якому поширюється ультразвукова спрямована хвиля. Опишемо хвильове поле через об'ємні ультразвукові хвилі

на границях розділу шару, оскільки при поширенні ультразвукових спрямованих хвиль в багат шаровій системі хвильова енергія не входить та не виходить із системи. Розподіл напружень та зміщень на границі розділу шару будемо визначати за допомогою (9) та (13). В одному шарі сума напружень та зміщень на верхній границі розділу середовищ повинна дорівнювати напруженням та зміщенням на нижній границі згідно визначення умови поширення спрямованих хвиль. Для одного шару характеристична матриця, що описує хвильове поле складатиметься із з'єднаних характеристичних матриць, що описують хвильове поле, на верхній $D_{\text{вх}}$ та нижній $D_{\text{нз}}$ границях розділу [5]:

$$D_{\text{шар}} = \begin{bmatrix} D_{\text{нз}} \\ D_{\text{вх}} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Виведемо характеристичну матрицю на верхній границі розділу шару, враховуючи (9)÷(14) та (25):

$$\begin{aligned} D_{\text{вх}11} &= \frac{c_l}{c_\phi}, D_{\text{вх}12} = \frac{c_l \cdot \xi_l}{c_\phi}, D_{\text{вх}13} = \xi_l, \\ D_{\text{вх}14} &= -\xi_l \cdot \xi_{el}, D_{\text{вх}21} = \xi_l, \\ D_{\text{вх}22} &= -\xi_l \cdot \xi_{el}, D_{\text{вх}23} = -c_t / c_\phi, \\ D_{\text{вх}24} &= -c_t \cdot \xi_{el} / c_\phi, \\ D_{\text{вх}31} &= ic_l \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2), \\ D_{\text{вх}32} &= ic_l \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2) \cdot \xi_{el}, \\ D_{\text{вх}33} &= -2ic_t^2 \omega \rho \xi_l / c_\phi, \\ D_{\text{вх}34} &= 2ic_t^2 \omega \rho \xi_l \xi_{el} / c_\phi, \\ D_{\text{вх}41} &= 2ic_t^2 \omega \rho \xi_l / c_\phi, \\ D_{\text{вх}42} &= -2ic_t^2 \omega \rho \xi_l \xi_{el} / c_\phi, \\ D_{\text{вх}43} &= ic_t \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2), \\ D_{\text{вх}44} &= ic_t \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2) \xi_{el}, \\ \xi_l &= \sqrt{1 - c_l^2 / c_\phi^2}, \xi_t = \sqrt{1 - c_t^2 / c_\phi^2}, \\ \xi_{el} &= e^{i\omega \cdot x \xi_l / c_l}, \xi_{et} = e^{i\omega \cdot x \xi_t / c_t}. \end{aligned} \quad (26)$$

Характеристична матриця на нижній границі розділу середовища буде такою:

$$\begin{aligned} D_{\text{нз}11} &= \frac{c_l \cdot \xi_{el}}{c_\phi}, D_{\text{нз}12} = \frac{c_l}{c_\phi}, D_{\text{нз}13} = \xi_l \cdot \xi_{el}, \\ D_{\text{нз}14} &= -\xi_l, D_{\text{нз}21} = \xi_l \cdot \xi_{el}, D_{\text{нз}22} = -\xi_l, \\ D_{\text{нз}23} &= -c_t \cdot \xi_{el} / c_\phi, D_{\text{нз}24} = -c_t / c_\phi, \\ D_{\text{нз}31} &= ic_l \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2) \cdot \xi_{el}, \\ D_{\text{нз}32} &= ic_l \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2), \\ D_{\text{нз}33} &= -2ic_t^2 \omega \rho \xi_l \xi_{el} / c_\phi, \\ D_{\text{нз}34} &= 2ic_t^2 \omega \rho \xi_l / c_\phi, \\ D_{\text{нз}41} &= 2ic_t^2 \omega \rho \xi_l \xi_{el} / c_\phi, \\ D_{\text{нз}42} &= -2ic_t^2 \omega \rho \xi_l / c_\phi, \\ D_{\text{нз}43} &= ic_t \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2) \xi_{el}, \\ D_{\text{нз}44} &= ic_t \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2). \end{aligned} \quad (27)$$

Для опису об'ємних хвиль в нижньому $D_{\text{нз}}$ на верхньому $D_{\text{нвх}}$ напівнезкінчених середовищах, що оточують середовище поширення спрямованих хвиль, необхідно модифікувати матриці (26) та (27) так, щоб у них було тільки дві хвильові складові:

$$\begin{aligned} D_{\text{н.нз}11} &= c_l / c_\phi, D_{\text{н.нз}12} = \xi_l, \\ D_{\text{н.нз}21} &= \xi_l, D_{\text{н.нз}22} = -c_t / c_\phi, \\ D_{\text{н.нз}31} &= ic_l \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2), \\ D_{\text{н.нз}32} &= -2ic_t^2 \omega \rho \xi_l / c_\phi, \\ D_{\text{н.нз}341} &= 2ic_t^2 \omega \rho \xi_l / c_\phi, \\ D_{\text{н.нз}342} &= ic_t \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2), \\ D_{\text{н.нз}41} &= c_l / c_\phi, D_{\text{н.нз}42} = -\xi_l, \\ D_{\text{н.нз}43} &= -\xi_l, D_{\text{н.нз}44} = -c_t / c_\phi, \\ D_{\text{н.нз}51} &= ic_l \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2), \\ D_{\text{н.нз}52} &= 2ic_t^2 \omega \rho \xi_l / c_\phi, \\ D_{\text{н.нз}541} &= -2ic_t^2 \omega \rho \xi_l / c_\phi, \\ D_{\text{н.нз}542} &= ic_t \omega \rho (1 - 2c_t^2 / c_\phi^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Матриця, що описує поширення спрямованої хвилі в трьох шарах матиме такий вигляд:

$$D_{\text{сис}} = \begin{pmatrix} D_{\text{н.нз}}(1,1) & D_{\text{н.нз}}(1,2) & D_{\text{вх}}(1,1) & D_{\text{вх}}(1,2) & D_{\text{вх}}(1,3) & D_{\text{вх}}(1,4) & 0 & 0 \\ D_{\text{н.нз}}(2,1) & D_{\text{н.нз}}(2,2) & D_{\text{вх}}(2,1) & D_{\text{вх}}(2,2) & D_{\text{вх}}(2,3) & D_{\text{вх}}(2,4) & 0 & 0 \\ D_{\text{н.нз}}(3,1) & D_{\text{н.нз}}(3,2) & D_{\text{вх}}(3,1) & D_{\text{вх}}(3,2) & D_{\text{вх}}(3,3) & D_{\text{вх}}(3,4) & 0 & 0 \\ D_{\text{н.нз}}(4,1) & D_{\text{н.нз}}(4,2) & D_{\text{вх}}(4,1) & D_{\text{вх}}(4,2) & D_{\text{вх}}(4,3) & D_{\text{вх}}(4,4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{\text{нз}}(1,1) & D_{\text{нз}}(1,2) & D_{\text{нз}}(1,3) & D_{\text{нз}}(1,4) & D_{\text{н.вх}}(1,1) & D_{\text{н.вх}}(1,2) \\ 0 & 0 & D_{\text{нз}}(2,1) & D_{\text{нз}}(2,2) & D_{\text{нз}}(2,3) & D_{\text{нз}}(2,4) & D_{\text{н.вх}}(2,1) & D_{\text{н.вх}}(2,2) \\ 0 & 0 & D_{\text{нз}}(3,1) & D_{\text{нз}}(3,2) & D_{\text{нз}}(3,3) & D_{\text{нз}}(3,4) & D_{\text{н.вх}}(3,1) & D_{\text{н.вх}}(3,2) \\ 0 & 0 & D_{\text{нз}}(4,1) & D_{\text{нз}}(4,2) & D_{\text{нз}}(4,3) & D_{\text{нз}}(4,4) & D_{\text{н.вх}}(4,1) & D_{\text{н.вх}}(4,2) \end{pmatrix} \quad (29)$$

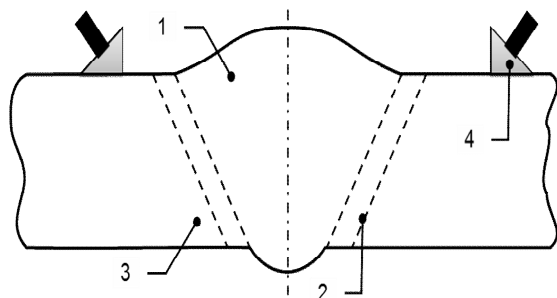
Для знаходження розв'язку (29) необхідно прирівняти $D_{\text{сис}}$ до нуля. Необхідно відмітити, що при побудові матриці $D_{\text{сис}}$ потрібно враховувати, що швидкості поширення об'ємних ультразвукових хвиль у різних шарах є різними.

Підхід загальної матриці має кращу схожимість у порівнянні із методами представленими у (16) та (21). Недоліком цього підходу є складність побудови загальної матриці при збільшенні кількості шарів.

Проведення досліджень зварного з'єднання трубопроводу

Розглянемо трубопровід із товщиною стінки 10 мм та діаметром 280 мм. Зварні з'єднання таких трубопроводів є односторонніми (рис. 3).

Зону зварного з'єднання з точки зору поширення пружних коливань можна розділити на три шари, рис. 3. Механічні параметри зварного з'єднання та зони температурного впливу залежатимуть від марки сталі та матеріалу електроду. Для проведення моделювання візьмемо типові значення матеріалу вуглецевої сталі та електроду, які приведені в [10] (табл. 1).



1 – зварне з'єднання; 2 – зона температурного впливу; 3 – стінка труби, 4 – ультразвуковий первинний перетворювач

Рисунок 3 – Модель зварного з'єднання трубопроводу

Таблиця 1 – Хімічні властивості зварного з'єднання та електроду

Елемент	C	Mn	P
Сталь Ст4	0.21	1.1	0.12
Електрод	0.09	1.0	0.017
Елемент	S	Si	Ni
Сталь Ст4	0.021	0.1	0.1
Електрод	0.024	0.50	–
Елемент	Cr	Mo	Cu
Сталь Ст4	0.08	0.1	0.1
Електрод	–	–	–

Механічні параметри зварного з'єднання вказані в табл. 2 [10].

Таблиця 2 – Механічні властивості зварного з'єднання

Матеріал	Модуль Юнга, ГПа	0.2 % зони плинності, МПа	Міцність, МПа
Сталь Ст4	207	280	460
Зварне з'єднання	189	580	710
Зона температурного впливу	189	534	667

Із табл. 2 можна побачити, що зона температурного впливу та зварне з'єднання мають однакові значення модуля Юнга. Це означає, що швидкості поширення ультразвукових хвиль в цих зонах є практично однаковими. Проте різні значення плинності та міцності матеріалу цих зон зварного з'єднання вказують на те, що їх матеріал є відмінним.

У зварному з'єднанні також є залишкові напруження, що вносять внесок у зміну швидкості поширення ультразвукових хвиль. За дослідженнями Глінки, розподіл залишкових напружень перпендикулярно осі зварного

з'єднання підлягає нормальному закону розподілу [14]. Напруження мають виражену складову розтягу всередині зварного з'єднання, а по боках зварного шва є максимуми напруження стиску. Враховувати залишкові напруження можна шляхом зміни швидкості поширення спрямованої ультразвукової хвилі, розбивши при цьому зону зварного з'єднання на окремі шари.

Лабораторні дослідження проводились на зразку трубопроводу. Схема генерування та прийому ультразвукової спрямованої хвилі наведена на рис. 3. Результуючий сигнал, отриманий за допомогою дефектоскопу, показує присутність набору мод, що сходиться із теоретичними дослідженнями (рис. 4).

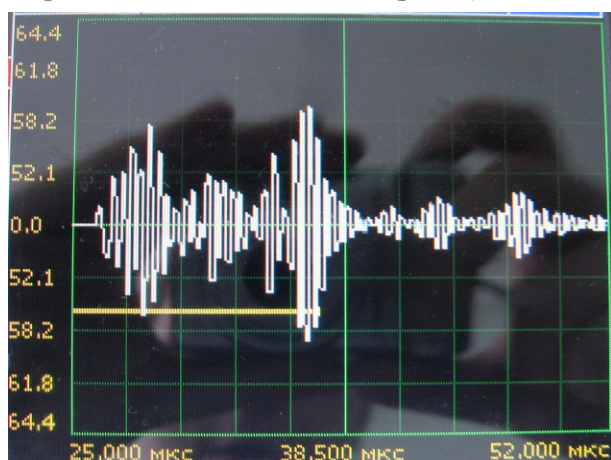


Рисунок 4 – Сигнал ультразвукової спрямованої хвилі, що пройшла зварне з'єднання трубопроводу Ø 280 мм та товщиною стінки 10 мм

Лабораторні дослідження показують, що сигнал спрямованої хвилі має достатню велику амплітуду та відношення сигнал / завади. Це дозволяє стверджувати, що запропонований підхід оцінки якості зварного з'єднання ультразвуковими спрямованими хвилями є ефективним засобом неруйнівного контролю зварних з'єднань трубопроводів.

ВИСНОВКИ

Теоретично обґрунтовано поширення ультразвукових спрямованих хвиль типу Лемба у багат шаровому середовищі. Для математичного опису було застосовано два підходи: передавальних матриць та загальної матриці. При проведенні обчислень виявлено, що метод передавальних матриць має обмеження щодо кількості шарів, їх товщини і частоти хвилі. Ці обмеження виявляються у нестабільності алгоритму числового пошуку кореня через операції ділення малих чисел на

великі. Фізичний зміст появи таких дробів полягає у тому, що на границях розділу шарів при певних кутах падіння об'ємних пружних хвиль утворюються негармонійні хвилі, амплітуда яких є малою відносно гармонійних хвиль.

При застосуванні підходу загальної матриці обчислення хвильових параметрів ультразвукової спрямованої хвилі нами встановлено, що процес обчислення не має таких обмежень, що є у підході передавальних матриць. Недоліком методу загальної матриці є складність її побудови для багат шарового середовища та складність аналізу хвильового поля на межі між шарами.

Проведені лабораторні дослідження поширення ультразвукової спрямованої хвилі через зварне з'єднання трубопроводу показали, що їх можна ефективно використовувати для неруйнівного контролю.

1. Solie L. P. Elastic waves in free anisotropic plates / L. P. Solie and B. A. Auld // *Journal of the Acoustical Society of America*. – 1972 p. – Issue 1. – Volume 54. – pp. 50–65.
2. Auld B. A. *Acoustic Fields and Waves in Solids: volume 1* / B. A. Auld. – Florida: Krieger Publishing Company Malabar, 1990. – 431 p. – ISBN–10 0894644904.
3. Rose J. L. *Ultrasonic Waves in Solid Media* / J. L. Rose. – Cambridge University Press, 1999. – 476 p. – ISBN–10 0521640431.
4. Мандра А. А. Акустичний контроль напружено–деформованого стану обв'язки агрегатів газокompресорних станцій: дис. ... канд. техн. наук: 05.11.13 / А. А. Мандра. – Івано–Франківськ, 2006. – 232 с.
5. Lowe M. J. S. *Plate waves for the NDT of diffusion bonded titanium: thesis: ... doctor of philosophy* / M. J. S. Lowe. – London, 1992. – 299 p.
6. Лютак І. 3. Побудова та обчислення математичної моделі поширення кільцевих мод в трубопроводі спрямованими хвилями в ультразвуковому діапазоні частот / І. 3. Лютак // *Технічна діагностика і неруйнівний контроль*. – 2009. – № 2. – С. 30–35.
7. Cawley P. *Practical Long Range Guided Wave Inspection – Applications to Pipe and Rails* / P. Cawley // *NDE2002 prediction, assurance, improvement. National Seminar of ISNT Chennai 5, 2002*. – 16 p.
8. Thomson W. T. *Transmission of elastic waves through a stratified solid medium* / W. T. Thomson // *Journal Appl. Phys.*, 1950. – Vol. 21. – P. 89–93.
9. Haskell N. A. *Dispersion of surface waves on multilayered media* / N. A. Haskell //

- Bulletin Seismic Society America*, 1953.– Vol. 43.– P. 17–34. 10. Mohammad S. A. *Structural integrity and fatigue crack propagation life assessment of welded and weld-repaired structures: thesis: ... in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy* / S. A. Mohammad.– South Dakota, 2005.– 192 p. 11. Knopoff L. *A matrix method for elastic wave problems* / L. Knopoff // *Bulletin of Seismic Society of America*, 1964.– Vol. 54.– P. 431–438. 12. Schmidt H. *Efficient numerical solution technique for wave propagation in horizontally stratified environment* / H. Schmidt, F. B. Jensen // *Computers & Mathematics with Applications*, 1985.– Vol. 11.– P. 699–715.
13. Pialucha T. P. *The reflection coefficient from interface layers in NDT of adhesive joints* / T. P. Pialucha.– London, 1992.– PhD thesis.– 254 p. 14. Glinka G. *Effect of Residual Stress on Fatigue Crack Growth in Steel Weldments Under Constant and Variable Amplitude Load* / G. Glinka // *Fracture Mechanics*. ASTM, 1979.– 677.– P. 198–214.

Поступила в редакцію 01.03.2012 р.

Рекомендував до друку докт. техн. наук.,
проф. Горбійчук М. І.